МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на третий курс

1. ④ Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S \frac{dS}{z^2+1}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{\ 1 \le z = \sqrt{x^2+y^2} \le 2\ \right\}$$

2. ④ Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \left(\sqrt{z}\,dx\,dy + x\,dy\,dz\right), \quad \text{где поверхность } S = \left\{\ z = x^2+y^2 \le 1\ \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющих тупой угол с осью z.

3. ④ Линейное преобразование φ трёхмерного евклидова пространства E в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти в E ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ. Найти ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

4. ④ Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \frac{2y(x) - \left(y'(x)\right)^2}{x}\,dx \qquad y(2) = 1.$$

5. ④ Вычислить расстояние между параболоидом P и плоскостью Π, где

$$P = \left\{\ z = (x-1)^2 + y^2\ \right\}, \quad \Pi = \left\{\ x + y - z = 2\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

6. ⑤ В пространстве $CL_2[0,1]$ для любого $N \in \mathbb{N}$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L_N = \operatorname{Lin}\left\{\ \sin(\pi n x) : n \in \overline{1,N}\ \right\}$ и вычислить расстояние ρ_N от f до L_N. Вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sqrt{N}\rho_N\right).$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на третий курс

1. ④ Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S \frac{dS}{z^2+1}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{ \ 1 \le z = \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \ \right\}$$

Ответ: $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \frac{\sqrt{2}\,dx\,dy}{x^2+y^2+1} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{2}r\,dr}{r^2+1} = \pi\sqrt{2}\ln\frac{5}{2}$.

Инструкция: поверхностный интеграл записан в виде повторного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

2. ④ Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \left(\sqrt{z}\,dx\,dy + x\,dy\,dz\right), \quad \text{где поверхность } S = \left\{ \ z = x^2+y^2 \le 1 \ \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющих тупой угол с осью z.

Ответ: $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(-\sqrt{x^2+y^2}+2x^2\right) dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr\,\left(-r+2r^2\cos^2\varphi\right) =$
$= -\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Инструкция: поверхностный интеграл записан в виде повторного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

3. ④ Линейное преобразование φ трёхмерного евклидова пространства E в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти в E ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ. Найти ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

Ответ: $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3+11\lambda^2-18\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-9)$.

Собственные числа и векторы:

$$\lambda_1 = 0,\ \mathbf{g}_1 = (1,-2,-1)^{\mathrm{т}}, \quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{g}_2 = (1,2,-3)^{\mathrm{т}}, \quad \lambda_3 = 9,\ \mathbf{g}_3 = (4,1,2)^{\mathrm{т}}.$$

ОНБ: в E — $\left\{ \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{6}},\ \frac{\mathbf{g}_2}{\sqrt{14}},\ \frac{\mathbf{g}_3}{\sqrt{21}} \right\}$, в $\operatorname{Ker}\varphi$ — $\left\{ \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{6}} \right\}$, в $\operatorname{Im}\varphi$ — $\left\{ \frac{\mathbf{g}_2}{\sqrt{14}},\ \frac{\mathbf{g}_3}{\sqrt{21}} \right\}$.

Инструкция: найден характеристический многочлен — 1 очко, найдены собственные числа — 1 очко, найдены собственные векторы — 1 очко.

4. (4) Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \frac{2y(x) - \big(y'(x)\big)^2}{x}\,dx \qquad y(2) = 1.$$

Ответ: $\hat{y}(x) = \ln 4 + \frac{x^2}{4}\left(1 - \ln x^2\right)$ — максимум.

Уравнение Эйлера $\frac{2}{x} + \frac{d}{dx}\frac{2y'(x)}{x} = 0$, тогда $\ln x + \frac{y'(x)}{x} = C$. Так как $y'(1) = 0$, то $C = 0$, и $y'(x) = -x\ln x$, откуда $y(x) = D + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$. Так как $y(2) = 1$, то $D = 2\ln 2 = \ln 4$, откуда $\hat{y}(x) = \ln 4 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$ — допустимая экстремаль.

Для любой функци $h \in C^1[1,2]$ вида $h(2) = 0$ и $h \not\equiv 0$ имеем:

$$J\left(\hat{y} + h\right) - J\left(\hat{y}\right) = -\int\limits_1^2 \frac{\big(h'(x)\big)^2}{x}\,dx < 0,$$

то есть $\hat{y}$ — максимум.

Инструкция: найдена допустимая экстремаль — 2 очка. Проведено исследование на экстремум — 2 очка.

5. (4) Вычислить расстояние между параболоидом P и плоскостью $\varPi$, где

$$P = \left\{ z = (x-1)^2 + y^2 \right\}, \quad \varPi = \left\{ x + y - z = 2 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\rho(P, \varPi) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Пусть точка $(x,y,z) \in P$ ближайшая к $\varPi$. Вектор $(2(x-1), 2y, -1)$ является нормалью к касательной плоскости к P в точке (x,y,z). Тогда векторы $(2(x-1), 2y, -1)$ и $(1,1,-1)$ параллельны, т. е. для некоторого $a \in \mathbb{R}$ выполнено $(2(x-1), 2y, -1) = a(1,1,-1)$. Находим $a = 1$, $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$. Ближайшей к P точкой плоскости $\varPi$ является $(x,y,z) + t(1,1,-1)$ для подходящего $t > 0$. При этом искомое расстояние равно $\rho = |t(1,1,-1)| = t\sqrt{3}$. Имеем: $2 = x + t + y + t - z + t = \frac{3}{2} + 3t$, то есть $t = \frac{1}{6}$, и $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Инструкция: найдена точка в P, ближайшая к $\varPi$ — 2 очка.

6. ⑤ В пространстве $CL_2[0,1]$ для любого $N \in \mathbb{N}$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L_N = \operatorname{Lin}\left\{ \sin(\pi n x) : n \in \overline{1,N} \right\}$ и вычислить расстояние ρ_N от f до L_N. Вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sqrt{N}\rho_N\right).$$

Ответ: $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n}\sin(\pi n x), \quad \rho_N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}, \quad \sqrt{N}\rho_N \to \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$

В силу минимального свойства коэффициентов Фурье, ортогональной проекцией функции f на подпространство L_N в $CL_2[0,1]$ является N-ая сумма Фурье f по ортогональной системе $\left\{ \sin(\pi n x) : n \in \mathbb{N} \right\}$, то есть функция

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(\pi n x), \quad \text{где} \quad a_n = 2\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу равенства Парсеваля имеем:

$$\rho_N = \|f - S_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 \left\|\sin(\pi n x)\right\|_2^2} = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}.$$

В силу очевидных соотношений

$$\frac{1}{N+1} = \int_{N+1}^{\infty}\frac{dt}{t^2} \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le \int_{N}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N}$$

получаем, что

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{N}{N+1}} \le \sqrt{N}\rho_N \le \frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

откуда по теореме о двух милиционерах следует равенство

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}\rho_N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Инструкция: ортогональная проекция — 2 очка, расстояние — 1 очко, предел — 2 очка.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–1	НЕУД. (1)
2–3	НЕУД. (2)
4–5	УДОВЛ. (3)
6–7	УДОВЛ. (4)
8–10	ХОР. (5)
11–13	ХОР. (6)
14–16	ХОР. (7)
17–19	ОТЛ. (8)
20–22	ОТЛ. (9)
23–25	ОТЛ. (10)